Drumhead model of interface

AUTHOR(S):

川崎, 恭治

CITATION:

川崎, 恭治. Drumhead model of interface. 物性研究 1981, 37(2): 90-92

ISSUE DATE:

1981-11-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/90396

Drumhead model of interface

九大・理　川　崎　恭　治

二相境界面の構造や厚さを無視して丁度太鼓の皮と同じようにみなす模型の事をdrumhead modelと称しその自由エネルギーは

$$F_{\mathrm{DH}} = \sigma \int d\boldsymbol{r}\ \left[1 + (\partial_{\boldsymbol{r}} f)\right]^{1/2} \tag{1}$$

と書ける。ここでσは表面張力，$f(\boldsymbol{r})$はある座標平面$\boldsymbol{r}$から測った境界面の位置を表わす。この様な模型は古くからあるが,[1] この模型に基づいた重要な結果として表面ラフニングがある。[2] この3次元以下での空間の面において，fのゆらぎ$\langle (\Delta f(\boldsymbol{r}))^2 \rangle$が，重力等の様に面を固定する力が働かない場合，体系の大きさの対数で発散する為に面の位置が確定できないと云う問題である。このモデルは本来より多くの自由度を含むGinzburg-Landau-Willson模型から導ける筈のものである。最近この方向に沿った研究がDiehl, Kroll, Wagnerによってなされた。[3] GLWのハミルトニアンを

$$H\{S\} = \int d\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(\nabla S)^2 - \frac{1}{2}\tau S^2 + \frac{g}{4!}S^4\right] \tag{2}$$

とする。ここで$S(\boldsymbol{x})$はorder parameter. 又，T_c以下を考えているので$\tau > 0$. これから平均場近似の下で境界相が$z=0$面にある時の$S(\boldsymbol{x})$は$S(\boldsymbol{x}) = M_e \tanh\left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}\,z\right)$となる。但し$M_e = (6\tau/g)^{1/2}$。したがって面の厚さが無視できる程小さい為には$\tau \to \infty$の極限をとればよい。但し$M_e$は有限に留めておきたいので$g \sim \tau \to \infty$とする。DHモデルを出す為に今$S(\boldsymbol{x}) = \chi(z - f(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r})$によって新たに関数$\chi$を導入する。面の座標$f(\boldsymbol{r})$は，$S(\boldsymbol{x})$が与えられた時

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, S(\boldsymbol{x})\, M'(z-f) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \chi(\boldsymbol{x}) M'(z) = 0 \tag{3}$$

できまる。但し$M' = dM/dz$。そうすると

$$H\{S\} = H\{\chi\} + \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}\left[(\partial_{\boldsymbol{r}} f)^2 (\partial_z \chi)^2 - 2\,\partial_{\boldsymbol{r}} f \cdot \partial_{\boldsymbol{r}} \chi \partial_z \chi\right] \tag{4}$$

これを条件(3)の下にχについて極小をとる。そうすると$g, \tau \to \infty$の極限で

$$\chi(\boldsymbol{x}) \to \chi_S(\boldsymbol{x}) = M(z/a) \tag{5}$$

但し$a \equiv \left[1 + (\partial_{\boldsymbol{r}} f)^2\right]^{1/2}$。

これを(4)に代入すれば$H\{S\}$のfを含む部分が得られる。我々はこの様な事をTDGL モデルについて試み(1)を時間を含む場合に拡張した。出発点にとったTDGL方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\boldsymbol{x}, t) = -L \frac{\delta}{\delta S(\boldsymbol{x}, t)} H\{S(\boldsymbol{x}, t)\} + \zeta(\boldsymbol{x}, t) \tag{6}$$

但し，

$$< \zeta(\boldsymbol{x}, t) \zeta(\boldsymbol{x}', t') > = 2L\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t') \tag{7}$$

これを先づ$S(\boldsymbol{x}, t)$と補助変数$\widetilde{S}(\boldsymbol{x}, t)$のpath probabilityに対する次の表式にかき直す：

$$W[\widetilde{S}, S] = \text{const.}\ \exp \mathscr{J}[\widetilde{S}, S] \tag{8}$$

$$\mathscr{J}[\widetilde{S}, S] = \int d\boldsymbol{x} \int dt\ [-L\widetilde{S}^2 + i\widetilde{S}(\frac{\partial S}{\partial t} + L\frac{\delta H}{\delta S}) + \frac{1}{2}\ \frac{\delta^2 H}{\delta S^2} \tag{9}$$

ここで

$$S(\boldsymbol{x}, t) = M(z-f) + \eta(\boldsymbol{r}, z-f, t) \tag{10}$$

とすると，ηはSに含まれる自由度の中で$f(\boldsymbol{r}, t)$と無関係の部分をあらわす。$\widetilde{S}$の方も同様に$\widetilde{f}$と$\widetilde{\eta}$に分ける。そうしておいて，fと$\widetilde{f}$を固定して(8)をηと$\widetilde{\eta}$について積分すれば界面の運動を記述する変数f，$\widetilde{f}$のpath probability $W[\widetilde{f}, f]$が得られる。τ，$g\to\infty$の極限ではこの操作を近似的に実行することが出来る。この時ソリトンの量子化に用いられた方法が使える。[4] 詳細を省略して結果だけかくと，

$$W[\widetilde{f}, f] = \text{const.}\ \exp[\iint dt\ d\boldsymbol{r}\ \mathscr{T}_{\text{eff}}\{\widetilde{f}, f\}] \tag{11}$$

但し

$$\mathscr{T}_{\text{eff}}\{\widetilde{f}, f\} \equiv -\frac{4Ta}{\sigma}\widetilde{f}^2 + i\widetilde{f}(\partial_t f - v_{\text{f}}) + R\{f\} \tag{12}$$

ここで

$$v_{\text{f}} \equiv aLK \qquad K = \partial_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial_{\boldsymbol{r}} f}{a} \tag{13}$$

Kは界面の平均曲率である。これに対応するLangevin方程式は

$$\mathring{f}(\boldsymbol{r}, t) = v_{\text{f}} + \theta_{\text{f}} \tag{14}$$

$$< \theta_f(\boldsymbol{r}, t)\, \theta_f(\boldsymbol{r}', t') > = \frac{2LTa}{\sigma}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta(t-t') \tag{15}$$

所でこの問題では $\boldsymbol{r}$ 平面のとり方によって結果が変ってはいけない，即ち Euclid 不変でなければならないと云う事がある。(1)の自由エネルギーで $d\boldsymbol{r}[1+(\partial_{\boldsymbol{r}}\cdot f)^2)^{1/2}$ は界面の不変な面積要素であるから(1)は Euclid 不変になっている。(14)式も不変である事は少し考えてみればわかる。 $\dot{f}/a$ に界面がその法線方向に移動する速さであって不変。又 $v_f/a = LK$ で K は不変な平均曲率。又(15)式で $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ は a と同様な変換性をもつ事に着目すれば θ_f/a も不変である。したがって(14)は

$$\dot{f}/a = LK + \theta_f/a \tag{16}$$

のような不変な形に書かれる。(14)式で $\theta_f = 0$ とおいたものは最近 Cahn と Allen[4] によって導かれた結果に一致する。

尚この研究は太田隆夫氏と共同でなされた。詳細はプログレスに発表する予定である[6]。

文　　献

1) L. I. Mandelstamm, Ann, phys, (Leipzing) **41** (1913) 609
2) D. J. Wallace, Cargese Lecture (Plenum, to be published)
3) H. W. Diehl, D. M. Kroll and H. Wagner. Z. Phys. B **36** (1980) 329
4) J. L. Gervais, A. Jevieki and B. Sakita, Phys. Rev. D **12** (1975) 1038
5) S. M. Allen and J. W. Cahn, Acta Metal. **27** (1979) 1085
6) K. Kawasaki and T. Ohta (preprint)

Renormalization group study of a single polymer chain under elongational flow

九大・理　　太田隆夫，山崎和子

高分子系の統計的性質については古くから幾多の理論的また実験的研究がある。しかし，一方では，70年代前半に de Gennes 等によって繰り込み群理論の適用の有効性が指適されながら，ごく最近まで systematic かつ intensive にそれが行なわれなかったという事実もある。